

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΟΜΑΔΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ  
ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ Ι & ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ:  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

**ΘΕΜΑ Α**

A1. Να αποδείξετε ότι για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ ,  $v \in \mathbb{N} - \{0,1\}$  ισχύει:

$$(x^v)' = vx^{v-1}.$$

**Μονάδες 10**

A2. Έστω  $f$  μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Τι ονομάζεται αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της  $f$  στο  $\Delta$ ;

**Μονάδες 5**

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

a) Ισχύει  $|\eta \mu x| \leq |x|$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

b) Αν η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  και η  $g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $f(x_0)$  τότε και η συνάρτηση  $g \circ f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ .

c) Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα της  $f$  είναι πάντοτε ολικό μέγιστο της  $f$ .

d) Αν η  $f$  είναι μια συνεχής συνάρτηση στο  $[\alpha, \beta]$ , και ισχύει  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 0$ , τότε  $f(x) = 0$  για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$ .

e) Τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης  $f$ , είναι υποψήφιος θέσεις τοπικών ακροτάτων της  $f$ .

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x > 1 \\ e^{1-x} - 1, & x \leq 1 \end{cases}$

B1. Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της  $f$ .

**Μονάδες 5**

B2. Να μελετήσετε την  $f$  ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

**Μονάδες 6**

B3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου  $\Omega$  που περικλείεται από την γραφική παράσταση της  $f$ , τον οριζόντιο άξονα των  $x$ , τον  $y'$  και την ευθεία  $x=2$ .

**Μονάδες 7**

B4. Να βρείτε τις εφαπτομένες της  $C_f$  που άγονται από το σημείο  $A(1,-1)$ .

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f_a(x) = \frac{3a}{e^x + a}$ ,  $a > 0$ .

**Γ1.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f_a$  ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 6

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι για κάθε  $a \in (0, +\infty)$  η γραφική παράσταση  $C_a$  της συνάρτησης  $f_a$  έχει ένα μόνο σημείο καμπής, στο οποίο η εφαπτομένη της  $C_a$  έχει σταθερό συντελεστή διεύθυνσης.

Μονάδες 6

**Γ3.** Να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση  $f^{-1}$ , της  $f$  και να υπολογίσετε το  $\int_1^2 f_a^{-1}(x) dx$ .

Μονάδες 8

**Γ4.** Να λύσετε την ανίσωση  $4f_a(x) \geq 3(-x + \ln(ae^2))$ .

Μονάδες 5

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύουν :

$$f(0) = 1$$

$$f(x) \cdot f'(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και}$$

$$\ln \frac{f'(x)}{f(x)} = f(x) - f'(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

καθώς και η συνάρτηση  $h(x) = \ln x + x$ .

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $h$  είναι 1-1 και  $f(x) = e^x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Μονάδες 8

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι η  $g(x) = h(x) + \sin x$ , έχει σύνολο τιμών το  $\mathbb{R}$ .

Μονάδες 7

**Δ3.** Ένα σημείο  $A(x(t), y(t))$   $x(t) \geq e$  κινείται πάνω στην καμπύλη της  $h$  και η τετμημένη του σημείου απομακρύνεται από την αρχή των αξόνων με ταχύτητα **20** m/sec. Η εφαπτομένη της  $C_h$  στο σημείο  $A$  τέμνει τον  $y'$  στο σημείο  $\Gamma$ . Να βρείτε την ταχύτητα με την οποία κινείται το  $\Gamma$  την χρονική στιγμή  $t_0$  κατά την οποία το  $A$  διέρχεται από το σημείο  $A_0(5, f(5))$ .

Μονάδες 5

**Δ4.** Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h(e^{x^2})}{e^{h(x^2)}}$ .

Μονάδες 5