

**ΚΥΡΙΑΚΗ 23 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2017**  
**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΟΜΑΔΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**  
**ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ Ι & ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ:**  
**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη στο  $(\alpha, \beta)$  με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του  $x_0$ , στο οποίο όμως η  $f$  είναι συνεχής. Αν ισχύει  $f'(x) > 0$  για κάθε  $x \in (\alpha, x_0)$  και  $f'(x) < 0$  για κάθε  $x \in (x_0, \beta)$  να αποδείξετε ότι η  $f$  στο  $x_0$  παρουσιάζει τοπικό μέγιστο.

**Μονάδες 10**

**A2.** Πότε θα λέμε ότι μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $A$  παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο  $x_0 \in A$ ;

**Μονάδες 5**

**A3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

a) Ισχύει  $(\sqrt[3]{x^2})' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}^*$ .

b) Η συνάρτηση  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$  έχει δύο σημεία στα οποία δεν είναι συνεχής.

c) Αν μια συνάρτηση  $f$  δυο φορές παραγωγίσιμη δεν έχει σημεία καμπής, τότε ισχύει  $f''(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in A_f$ .

d) Αν η  $f$  είναι μια συνεχής συνάρτηση στο  $[\alpha, \beta]$ , και ισχύει  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$ , τότε  $\alpha = \beta$ .

e) Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι 1-1, τότε είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της.

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x + 2 - 4 \frac{e^x}{e^x + 1}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**B1.** Να βρείτε την μονοτονία της  $f$  και τα ακρότατα, αν υπάρχουν.

**Μονάδες 5**

**B2.** Να βρείτε την εφαπτομένη της  $C_f$  στο σημείο καμπής της.

**Μονάδες 6**

**B3.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της  $f$ .

**Μονάδες 7**

**B4.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου  $\Omega$  που περικλείεται από την  $C_f$ , την ευθεία  $y=x+2$ , τον  $y'$  και την  $x=1$ .

**Μονάδες 7**

### ΘΕΜΑ Γ

Έστω  $f(x) = \frac{\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma}{x^2 - 1}$  με  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  και  $y=2x-1$  ασύμπτωτη της  $f$  στο  $+\infty$ .

**Γ1.** Να δείξετε ότι  $\alpha=2$  και  $\beta=-1$ .

**Μονάδες 6**

**Γ2.** Αν επιπλέον η  $f$  παρουσιάζει σημείο καμπής στο  $x_0=0$  να δείξετε ότι  $\gamma=1$ .

**Μονάδες 6**

**Γ3.** Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης  $2x^3 - (k+1)x^2 + k + 1 = 0$ ,  $x \geq 0$  για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού  $k$ .

**Μονάδες 8**

**Γ4.** Να υπολογίσετε το ορισμένο ολοκλήρωμα  $\int_{\frac{1}{2}}^0 f(t) dt$ .

**Μονάδες 5**

### ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f$  και  $g$  για τις οποίες ισχύουν  $f(x)g(x) = \ln(x^2+1) - x^2$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Δ1.** Να δείξετε ότι οι  $f$  και  $g$  έχουν το πολύ ένα σημείο τομής.

**Μονάδες 8**

**Δ2.** Αν επιπλέον ισχύει ότι  $f(1) = \frac{\ln 2 - 1}{2}$ ,  $g(0) = 2$  και  $f'(x) = -\frac{x^3}{x^2 + 1}$ , να βρείτε τον τύπο των  $f$  και  $g$ .

**Μονάδες 7**

**Δ3.** Αν  $F$  μια παράγουσα της  $f$  με  $F(0) = 0$  να δείξετε ότι η  $F$  είναι περιττή και να υπολογίσετε το  $\int_{-1}^1 F(x) dx$ .

**Μονάδες 5**

**Δ4.** Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό  $\alpha$ , ώστε  $\int_{\alpha^3 + \alpha}^{g(2017)} f(x^{2018} + 1) dx = 0$ .

**Μονάδες 5**