

ΚΥΡΙΑΚΗ 16 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2017
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΟΜΑΔΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ Ι & ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο (α, β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ να αποδείξετε ότι η f στο x_0 δεν παρουσιάζει τοπικό μέγιστο και ότι είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β) .

Μονάδες 10

A2. Πότε θα λέμε ότι μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα A παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0 \in A$;

Μονάδες 5

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

a) Η εικόνα $f(\Delta)$ μιας συνεχούς συνάρτησης f είναι πάντοτε διάστημα.

b) Αν για μια συνάρτηση f ισχύει ότι $f(x) \neq 0$ για κάθε x στο διάστημα Δ τότε η f διατηρεί πρόσημο στο Δ .

c) Το ορισμένο ολοκλήρωμα μιας συνεχούς συνάρτησης εκφράζει πάντοτε εμβαδόν.

d) Ισχύει πάντοτε $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

e) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη, τότε η παράγωγός της είναι πάντα συνεχής.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x - 1}$.

B1. Να βρείτε την μονοτονία της f και τα ακρότατα.

Μονάδες 5

B2. Να δείξετε ότι η C_f δεν έχει σημείο στο οποίο κάποια ευθεία να την διαπερνά.

Μονάδες 6

B3. Να δείξετε ότι η ευθεία $y=x+2$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και στο $-\infty$ και να βρείτε και την άλλη ασύμπτωτη.

Μονάδες 7

B4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την C_f , την ασύμπτωτη και τις ευθείες $x=3$ και $x=5$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Έστω $f(x) = 3^x$ και $g(x) = -x^2 + 3x + 1$ $x \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να δείξετε ότι γραφικές τους παραστάσεις έχουν ακριβώς δύο κοινά σημεία τα οποία να βρείτε.

Μονάδες 6

Γ2. Να βρείτε σημείο Γ της C_f , το οποίο απέχει την ελάχιστη απόσταση από το σημείο $A(\ln 3, 0)$.

Μονάδες 6

Γ3. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in [0, 1]$ στο οποίο οι εφαπτομένες των C_f και C_g είναι μεταξύ τους παράλληλες.

Μονάδες 8

Γ4. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο Γ και να δείξετε ότι το Γ απέχει την μικρότερη απόσταση από την ευθεία $y = \ln 3 \cdot x - 2017$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις παρακάτω σχέσεις :

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) + e}{x} = 2$$

$$(2) e^{2xy} f(x-y) = e^{x^2} f(-y) + e^{y^2} f(x) + e^{x^2+1} + e^{y^2+1} - e^{2xy+1} \quad \text{για}$$

κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να δείξετε ότι $f'(0) = 1$.

Μονάδες 4

Δ2. Να δείξετε ότι $f'(x) = 2xf(x) + e^{x^2} + 2ex$.

Μονάδες 6

Δ3. Να δείξετε ότι $f(x) = xe^{x^2} - e$, $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 8

Δ4. Να δείξετε ότι $\int_0^1 f(t)(1-t)dt = \int_0^1 \left(\int_0^t f(u)du \right) dt$.

Μονάδες 7