

ΚΥΡΙΑΚΗ 2 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2017
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΟΜΑΔΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ Ι & ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ Α

A1. Να δείξετε ότι $(\alpha^x)' = \alpha^x \ln \alpha$, $\alpha \in (0, +\infty)$ και $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 10

A2. Έστω f μια συνάρτηση και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της C_f . Πως ορίζεται η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της A ;

Μονάδες 5

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

a) Αν η f είναι κοίλη σε ένα διάστημα Δ , τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται πάνω από την γραφική παράσταση.

b) Στα σημεία καμπής η εφαπτομένη της C_f διαπερνά την καμπύλη.

c) Ισχύει πάντα ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

d) Αν η f είναι μια συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$, τότε ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = - \int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx$.

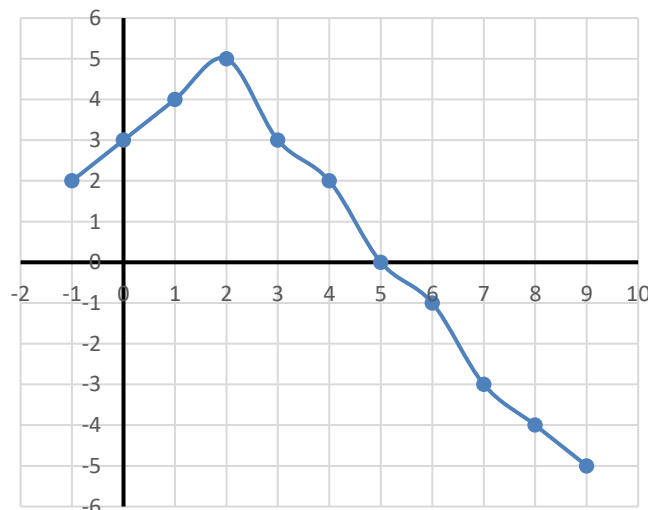
e) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι 1-1, τότε δεν είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της f' μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού $[-1, 9]$.

Γραφική Παράσταση της f'



B1. Να βρείτε την μονοτονία της f και τα τοπικά ακρότατα.

Μονάδες 7

B2. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή , κοίλη καθώς και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 7

B3. Να βρείτε διάστημα μήκους 3 στο οποίο ισχύει το θεώρημα Rolle για την f' . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 5

B4. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-3}{f'(x)}$

β) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

γ) $\lim_{x \rightarrow 2} f'(f'(x))$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Έστω $f(x) = x + \frac{\ln x}{x}$ $x > 0$.

Γ1. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και ότι παρουσιάζει μοναδικό σημείο καμπής το οποίο να βρείτε.

Μονάδες 6

Γ2. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων $\Gamma(0, \gamma)$ του $y' \gamma$ από τα οποία άγεται μοναδική εφαπτομένη της C_f .

Μονάδες 6

Γ3. Να βρείτε το εμβαδόν $E(\alpha)$ του χωρίου Ω που περικλείεται από την C_f τον $\chi' \chi$ καθώς και τις ευθείες $\chi=1$ και $\chi=\alpha$, $\alpha > 1$.

Μονάδες 8

Γ4. Αν το α κινείται με ταχύτητα 3 m/sec , να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού την χρονική στιγμή το κατά την οποία το α διέρχεται από το σημείο $\Sigma(e,0)$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Έστω συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f'(x) = -\frac{2x}{x^2+1}f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ και $f(0)=1$.

Δ1. Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Μονάδες 6

Δ2. Αν F παράγουσα της f στο $(0, +\infty)$ με $F(1)=0$, να δείξετε ότι $F(x) = -F\left(\frac{1}{x}\right)$ για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 6

Δ3. Αν το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την CF τον χ την $\chi=1$ και την $\chi=2$ ισούται

με $\ln\sqrt{\frac{2e^4}{5}}$, να βρείτε την εφαπτομένη της CF στο σημείο της με τετμημένη $x_0=2$.

Μονάδες 8

Δ4. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} (F(x+1) - F(x))$.

Μονάδες 5