

ΚΥΡΙΑΚΗ 23 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2017
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΟΜΑΔΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ Ι & ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ ΚΑΙ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1

A1. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα άνω ή είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ και πότε στρέφει τα κοίλα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ ;

Μονάδες 5

A2. Έστω συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ . Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ .

Μονάδες 10

A3. Να χαρακτηρίσετε την κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις αν είναι σωστή ή λάθος .

1. κάθε συνάρτηση που είναι γνησίως μονότονη στο \mathbb{R} , έχει ακριβώς μια ρίζα στο \mathbb{R} .
2. αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[a,b)$, τότε δεν έχει μέγιστη τιμή στο $[a,b)$
3. αν για μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f ισχύει $f'(x_0) = 0$ όπου x_0 εσωτερικό σημείο του A_f , τότε το x_0 είναι θέση τοπικού ακροτάτου.
4. το τοπικό μέγιστο μιας συνάρτησης είναι πάντα μεγαλύτερο από κάθε τοπικό ελάχιστο.
5. έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[a,b]$ και $\int_a^b f(x)dx = 0$, τότε $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a,b]$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 2

B1. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(0)=0$ και $f'(x) + f(x) = 2xe^{-x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

1. να δείξετε ότι $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 7

2. να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 5

3. να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .

Μονάδες 5

4. να υπολογίσετε το $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} E(\alpha)$ όπου $E(\alpha)$, το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f τους άξονες $x'x$, $y'y$ και την ευθεία $x=\alpha$, $\alpha>0$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 3

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[\alpha, +\infty)$ για την οποία ισχύει $e^{f(x)} = x + f(x)$ για κάθε $x \geq \alpha$.

1. να δείξετε ότι η f διατηρεί πρόσημο στο $[\alpha, +\infty)$.

Μονάδες 3

2. να δείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη.

Μονάδες 5

3. αν $f(\alpha) < 0$ να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα.

Μονάδες 5

4. να δείξετε ότι $\alpha \geq 1$.

Μονάδες 4

5. αν $f(\alpha) = k$, $f(b) = \lambda$, $b > \alpha$ τότε να βρείτε το $\int_{\alpha}^b f(x) dx$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4

Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \alpha^x + x^2$, $x \in \mathbb{R}$, $1 < \alpha < 3$.

1. να δείξετε ότι η f είναι κυρτή.

Μονάδες 3

2. να δείξετε ότι η f έχει ελάχιστη τιμή στο \mathbb{R} .

Μονάδες 5

3. να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = \alpha x^2 + 1$ έχει ακριβώς τρεις ρίζες ρ_1, ρ_2, ρ_3 με $\rho_1, \rho_2 \in [0, 1], \rho_3 > 2$.

Μονάδες 7

4. έστω η συνάρτηση $h(x) = \frac{x^2 + 1}{\alpha^x + f(0)}$.

α. να δείξετε ότι $h(x) + h(-x) = x^2 + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β. να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_h , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=-1$ και $x=1$.

Μονάδες 10